Μάθημα 23ο

25/05/16

$\mathbb{R}[x]$ δακτύλιος

$f(x) = x^2+1$ ανάγωγο στον $\mathbb{R}[x]$

$I = \langle f(x) \rangle$ ιδεώδες που γεννάται

I μέγιστο $\Rightarrow \mathbb{R}[x]/_I$ σώμα

$g(x)+I$ με $g(x) \in \mathbb{R}[x]$

$\deg(g(x)) \geq 2 \Rightarrow g(x) = \pi(x)f(x) + u(x)$

$u(x) = 0$ ή $\deg(u(x)) \leq 1$

- $u(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) =$ πολ/σιο του $f(x)$

άρα $g(x)+I = I$ μηδενικό στοιχείο στον $\mathbb{R}[x]/_I = C$

- $u(x) \neq 0 \Rightarrow u(x) = a+bx$ με $a^2+b^2 \neq 0$

$u(x) = a+bx \quad a,b \in \mathbb{R}$

$g(x)+I = \pi(x)f(x) + u(x) + I = u(x)+I$

$\{u(x) = a+bx \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ δ.χ. διάστασης 2

ΟΧΙ ΜΟΝΟ Διαν. χώρος, έχουμε γινόμενο.

$u(x)+I = a+bx+I = \bar{a}+\bar{b}\bar{x} = a+b\bar{x}$

$(x^2+1)+I = I$

$(\bar{x})^2+1 = \bar{0}$ μηδενικό στοιχείο στον C

$\bar{x}$ επαληθεύει το πολυώνυμο x^2+1 στο C

Αντί να γράφουμε $\bar{x}$ γράφουμε $i = \bar{x}$. Με $i^2+1=0$

$C = \{a+b\bar{x} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$C = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{C}$

$\cancel{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

$(a+b\bar{x})(a'+b'\bar{x}) = (a+bx+I)(a'+b'x+I) = (a+bx)(a'+b'x)+I = aa'+(ba'+ab')x+bb'x^2+I =$

$= aa'+(ba'+ab')x - bb' + I =$

$= (aa'-bb') + (ba'+ab')\bar{x}$

$x^2 = (x^2+1)\cdot 1 - 1$

$x^2+I = (x^2+1)-1+I$

$= -1+I$

Το γινόμενο που βρήκαμε στο C είναι ακριβώς το γινόμενο που έχει οριστεί στους μιγαδικούς $\mathbb{C}$. Άρα $C \cong \mathbb{C}$

$\mathbb{R}[x]$, $\deg g(x) = 2k+1 \Rightarrow g(x)$ έχει πραγματική ρίζα

$g(x) = a_{2k}x^{2k} + \ldots + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$

Αν $g(a+bi)=0$ (έχει μιγαδική ρίζα)

$a_{2k}(a+bi)^{2k} + \ldots + a_1(a+bi) + a_0 = 0$

$g(a-bi)=0 \Rightarrow a-bi$ επίσης ρίζα.

$[x-(a+bi)][x-(a-bi)] = x^2 - (a-bi)x - (a+bi)x + (a^2+b^2) =$

$= x^2 - 2ax + a^2+b^2$ πραγματικό τριώνυμο

και ένα προηγούμενο

$g(x) = \boxed{(x-v_1)(x-v_2)} \cdot \boxed{\cdot}\boxed{(x-v_{2k})}$, $v_i \in \mathbb{C}$

Ζευγάρια με τριώνυμα

ΘΕΩΡΗΜΑ: Τα ανάγωγα πολυώνυμα στον $\mathbb{R}[x]$ είναι πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $x^4+1 \in \mathbb{R}[x]$ δεν είναι ανάγωγο

$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)$ αδύνατο

$(-a_1)^4 + 1 = \cancel{0}$

Υποχρεωτικά $x^4+1 = (x^2+ax+b)(x^2+a'x+b') = x^4 + (a'+a)x^3 + (b'+b+aa')x^2 + (ab'+ba')x + bb'$

$a'+a=0 \Rightarrow a'=-a$

$bb'=1 \Rightarrow b' = \frac{1}{b}$ ομόσημα

$ab'+ba'=0 \Rightarrow \frac{a}{b} - ba = 0 \rightarrow a=0$

$b'+b+aa'=0 \Rightarrow b'+b=0!!! \Rightarrow a \neq 0$

$b=\frac{1}{b}$, $a\neq 0$, $b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1$

- $b=-1$
  $b'+b+aa'=0 \Rightarrow -2-a^2=0$ Αδύνατο
- $b=1 \Rightarrow 2-a^2=0 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$
  $a=\sqrt{2}$ και $a'=-\sqrt{2}$
  $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

Π.Χ.

$x^4+2x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{Q}[x]$ το -1 είναι ρίζα.

$x^4+x^3+x^3+x^2+x+1$

Π.Χ.

$x^4+x^3+2x^2+x+2 \in \mathbb{Z}_3[x]$

$(-1)^4-1+2-1+2\equiv 0$

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 7

ΑΣΚΗΣΗ 1

$I=\{(a,2b) \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ μέγιστο

α) $I\leq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ πρόσθεση, πολλαπλασιασμός κλειστές

$(a,2b)(\gamma,\delta)=(a\gamma,2b\delta)\in I \trianglelefteq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

Υποθέτουμε ότι $\exists\, J \trianglelefteq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ με $I\leq J$

$\{(a,2b) \mid \ldots\} \subsetneq J \Rightarrow \exists (\kappa,\lambda)\in J-I \Rightarrow$

$(\kappa,2n+1)\in J$, $(\kappa,2n)\in I\subseteq J \Rightarrow$

$(\kappa,2n+1)-(\kappa,2n)\in J \Rightarrow (0,1)\in J$, $(1,0)\in J$

$(a,0)=a(1,0)\in J$ και $(0,b)=b(0,1)\in J$

$(a,b)\in J \subsetneq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ Άτοπο

ΑΣΚΗΣΗ 2:

$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$

$A\leq M(2\times 2,\mathbb{R}) \Rightarrow A$ δακτύλιος

$I=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\} \triangleleft A$ μέγιστο

$\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & J \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \triangleleft A$

Υποθέτουμε ότι I όχι μέγιστο.
$\exists J \ntriangleleft A$ με $I \subsetneq J$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\neq 0 \end{pmatrix} \in J - I$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in J$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$

$J\triangleleft A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in J$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in J$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in J \Rightarrow J=A$ αδύνατο.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε το $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

$S \leq R$, $I \underset{\oplus}{\trianglelefteq} R$, $I < S$

$S/I \leq R/I$ Πράξεις κλειστές

$(s+I)+(s'+I) = \underbrace{s+s'}_{\in S \leq R}+I \in S/I$

$(s+I)(s'+I) = \underbrace{ss'}_{\in S \leq R}+I \in S/I$

$S/I \Leftrightarrow I \trianglelefteq \underset{\oplus}{S} \leq R$

$I \trianglelefteq S \Rightarrow S/I \trianglelefteq R/I$

$(r+I)(s+I) = \underbrace{rs}_{\in I \trianglelefteq R}+I$

$(s+I)(r+I) = \underbrace{sr}_{\in I \trianglelefteq R}+I$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

$|\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4| = 8$

$\mathbb{Z}_4$ όχι ακέραια περιοχή
$2 \cdot 2 \equiv 0 \bmod 4$

$\{0\} \trianglelefteq \mathbb{Z}_4$ είναι ιδεώδες, με όποιο στοιχείο και αν πολλ/σω το 0 θα είναι πάλι 0
$\{0\}$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες, $2 \cdot 2$ ανήκει ενώ 2 δεν ανήκει

$2\mathbb{Z}_4 \leq \mathbb{Z}_4$ ✓ είναι υποδακτύλιος
$\{0,2\} \trianglelefteq \mathbb{Z}_4$ ✓
είναι μέγιστο
πρώτο

$\{(0,0)\} \triangleleft \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$

$(0,2)(0,2) = (0,0)$ όχι πρώτο

$\{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4 \triangleleft \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ όχι μέγιστο

$\mathbb{Z}_2$

$(a,b)(c,d) = (ac, bd) \in \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4$

$ac \equiv 0 \bmod 2 \Rightarrow$	$bd = 2\kappa + 4\lambda$
a ή $c \equiv 0 \bmod 2$	$2 \mid b$ ή $d \Rightarrow$

$(0,3)(1,2) = (0,2) \in \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4$

όχι πρώτο

$(0,3), (1,2) \notin \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4$

$\{0\} \oplus \mathbb{Z}_4$ μέγιστο, πρώτο

$\mathbb{Z}_2 \oplus \{0\} \subsetneq \mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_4$ όχι μέγιστο

$(1,2)(1,2) = (1,0)$ όχι πρώτο

$\mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_4 \triangleleft \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ μέγιστο

ΑΣΚΗΣΗ 6

- $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι
  $z \mapsto \bar{z}$ (η συζυγία διατηρεί άθροισμα και γινόμενο)

$\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ όχι
$a + bi \mapsto a$

ΑΣΚΗΣΗ 7:

$2\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}$

Σαν ομάδες $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle < \mathbb{Z}$

$3\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}$

$\langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \langle 3 \rangle$

άπειρες κυκλικές $\quad 2 \to 3$

σαν ομάδες $\quad 2k \to 3k$

Σαν δακτύλιοι $\varphi : 2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} 3\mathbb{Z}$

$2 \mapsto \pm 3$

$2^2 = 2 + 2 \mapsto \pm 6 \neq (\pm 3)^2$ δεν γίνεται σαν δακτύλιος